GRAFOS

Soluciones a los ejercicios

PROBLEMA 1:

Considérese el grafo G siguiente:

b e



2

6

6

5

1

4

2

6

a

1

6

4

4

c

2

d

5

g

4

h

6

2

1

5

j

6 6

f i

1. ¿Es G un grafo simple? ¿Es plano? ¿Es bipartito? ¿Es completo? ¿Es regular? ¿Es conexo?
2. Hallar el número de regiones, vértices y aristas del grafo dual *G⋆*.
3. ¿Es G Euleriano? Hallar un camino o circuito euleriano si es posible.
4. Hallar un árbol A generador mínimo de G y el peso total de dicho árbol.

Solución.

1. No es un grafo simple, porque hay tres aristas entre los vértices *h* y *g*. Es plano, ya que su representación gráfica no tiene aristas que se crucen. No es bipartito porque tiene ciclos de longitud tres (por ejemplo, (*f, g, b, f* ). No es completo porque no todos sus vértices están conectados entre sí (por ejemplo, los vértices *a* y *f* no son adyacentes). No es regular porque no todos los vértices tiene el mismo grado (por ejemplo, el grado de *a* es 2 y el de *d*, 4). Es conexo, porque dado cualquier par de vértices, existe un camino elemental que los une.
2. Al ser *G* plano, podemos definir su dual *G⋆*. El número de vértices, aristas y regiones del grafo original puede ser contado directamente de la figura

|*V* | = 10 *,* |*E*| = 21 *, R* = 13 *.*

Estas cantidades satisfacen la ecuación de Euler: |*V* | − |*E*| + *R* = 10 − 21 + 13 = 2. Las

correspondientes cantidades para el grafo dual son

|*V ⋆*| = *R* = 13 *,* |*E⋆*| = |*E*| = 21 *, R⋆* = |*V* | = 10 *.*

1

1. No es euleriano porque hay vértices de grado impar (*g* y *h*). Sin embargo, es semi-euleriano ya que sólo hay dos vértices con grado impar por lo que admite un camino euleriano que, por ejemplo, comienza en *g* y acaba en *h*. Este camino se puede obtener mediante la modificación

2 4 4↑ 6↑

del algoritmo de Fleury: *g* → *c* → *d* → *c* → *b* → *g* → *f* → *b* → *a* → *e* → *d* → *h* → *e* → *i* →

6↓ 4↓ 2↓ 2↑ 6 *p*

*h* → *i* → *j* → *f* → *g* → *h* → *g* → *h*, donde *h* → *i* significa la arista de peso *p* que une *h* con

*p*↑

*i*. Cuando hay dos aristas entre los mismos vértices y con el mismo peso *p*, escribimos *h* → *i*

*p*↓

para denotar la que está encima y *h* → *i* la que está debajo.

b e



a

1

6

4

4

c

2

d

5

2

6

6

5

1

4

2

6

g

4

h

6

2

1

5

j

6 6

f i

1. Un árbol de peso mínimo lo obtenemos por ejemplo usando el algoritmo de Kruskal. El resultado *A* = (*V, F* ) lo podemos escribir dando el conjunto *F* de las aristas del árbol

*F* = {{*a, b*}*,* {*e, h*}*,* {*f, j*}*,* {*b, g*}*,* {*c, d*}2*,* {*g, h*}2*,* {*b, c*}*,* {*f, g*}4*,* {*i, j*}} *,*

donde, por ejemplo, {*g, h*}2 significa que tomamos una de las aristas de peso *ω* = 2 (si hubiese

varias) entre los vértices *g* y *h*. Hay |*F* | = 9 aristas, como es de esperar (|*F* | = |*V* | − 1). El peso total de

este árbol es

*ω* = *ωi* = 3 · 1 + 3 · 2 + 2 · 4 + 1 · 5 = 22 *.*

Σ

*i*∈*F*

Nótese que en este caso no hay un único árbol recubridor de peso mínimo.

b e



2

6

6

5

1

4

2

6

a

1

6

4

4

c

2

d

5

g

4

h

6

2

1

5

j

6 6

f i

PROBLEMA 2:

Considérese el grafo ponderado de la figura y contéstese a las siguientes preguntas:

* 1. Calcular el árbol recubridor de peso mínimo sobre dicho grafo y dar su peso.
  2. Decir si el grafo es euleriano o semi-euleriano y por qué. En caso de que alguna de las respuestas sea afirmativa, encontrar el correspondiente recorrido euleriano o semi- euleriano.
  3. Decir si es regular, bipartito y completo y por qué.

b 7 d



8

16

17

5

11

10

6

13

14

s z

a c

Solución.

1. El árbol generador de peso mínimo está formado por las aristas {s,b}, {b,d}, {d,z}, {z,a}, y

{b,c} y pesa 37 unidades.

b 7 d



8

16

17

5

11

10

6

13

14

s z

a c

1. Puesto que hay más de dos vértices con grado impar el grafo no es ni euleriano ni semi- euleriano.
2. El grafo no es regular ya que hay vértices con grados distintos. No es completo porque hay vértices que no son adyacentes. Tampoco es bipartito ya que contiene ciclos de longitud tres, por ejemplo, (s,d,b,s).

Solución.

1. Si nombramos los vértices 1*,* 2*,* 3*, . . . ,* 8 según el orden en la matriz de adyacencia, una representación gráfica de *G* es

2

1 3



4 6 7

5

8